网页搜索排名.

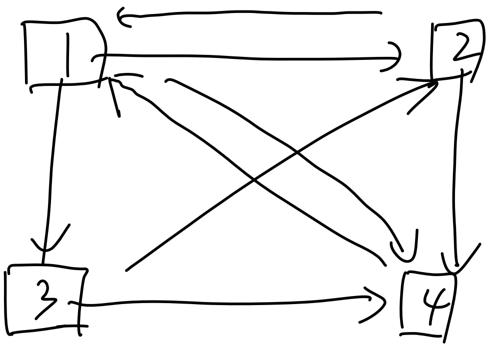
周四上午 9-11:30 考试

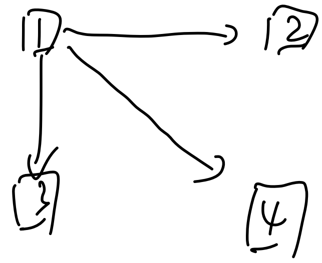
问题：对网页搜索结果进行排序

Homework. 期中, 期末

PageRank (Google 的最早算法). 从网页连接计算重要性

模型：1. 2. 3. 4 四处网址. 相互超链接情况如下.





x_1, 1号网页的重要度.

x_2, 2号网页的重要度,

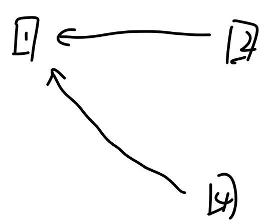
x_3

x_4

(流量)

x_1 的重要度分成三份

分别给了 2. 3. 4



类似的.
$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4, & x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 0 \\
x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_3, & \frac{1}{3}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\
x_3 = \frac{1}{3}x_1 & \frac{1}{3}x_1 = x_3
\end{cases}
$$

$$
x_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3. \qquad \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 0
$$

消元法求解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$　　t 为任意实数.

对一般的网络连接方式，是否一定有非零解，解是否都形如 $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} \cdot t$

目标：求解线性方程组，了解解的结构.

一．在什么集合（空间）内求解？

二．什么是线性方程？

三．如何求解？

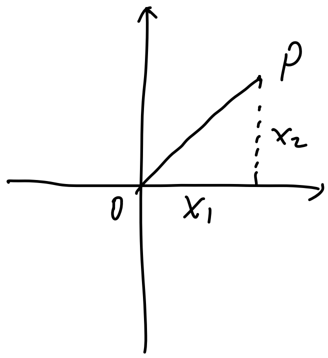
一．例子：

$\mathbb{R}$ 实数的集合.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$　　x_i 都是实数．$x_i \in \mathbb{R}$.
长度为 4 的实数组.

长度为 2 的实数组 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

一一对应于平面上的点，记作 $\mathbb{R}^2$.



P -- 对应于从原点 O 到 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$

$\mathbb{R}^3$ 对应三维空间中的点

定义：（列向量空间）

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ x_i \in \mathbb{R} \right\}$$ 或者 $n \times 1$ 的矩阵的集合.

定义（加法和数乘）

1. 加法（sum）

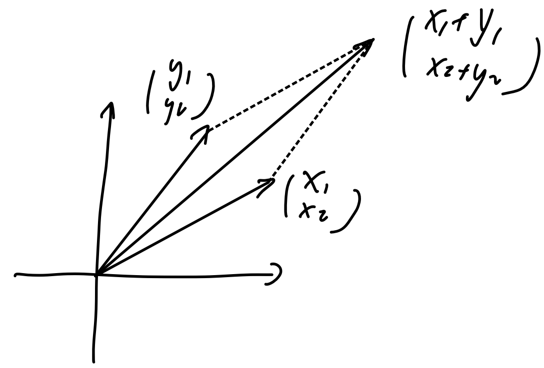
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

2. 数乘（scalar product） $c \in \mathbb{R}$ 数.

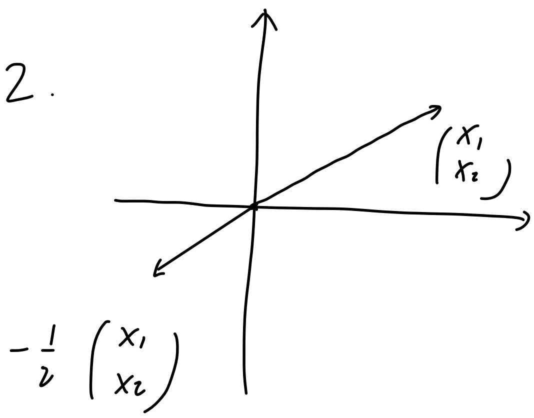
$$c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

几何意义

1.



2.



二. 什么是线性方程.

线性函数 = 某个值.

例子中 $x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 0$

什么是线性函数

对 $\mathbb{R}^n$ 上的函数: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto F(x)$$

如果存在 $a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, \cdots a_n \in \mathbb{R}$ 是常数（不随 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 变化）

使得 F 可有如下表达式

$$F(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n .$$

例子： $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1+1)^2 - (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - (x_2+1)^2$

不是线性函数的例子

$$F_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2 + 2, \quad F_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2$$

为什么不是：

定理：函数 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是线性函数

当且仅当 F 满足

① 对任意 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$.

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$

② 对任意 $c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.

$$F(cx) = cF(x).$$

证明："$\Leftarrow$" 当 F 满足 ①. ② 时

记 $a_1 = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad a_2 = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdots$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \overset{②}{=} x_1 \cdot F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= a_1 x_1$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a_2 \cdot x_2 \quad \cdots$$

$① \Rightarrow \quad \forall X_1, X_2, \cdots X_m \in \mathbb{R}^n$

$$F(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = F((X_1 + X_2 \cdots + X_{m-1}) + X_m)$$

$$= F(X_1 + X_2 + \cdots + X_{m-1}) + F(X_m)$$

$$= F(X_1 + X_2 + \cdots X_{m-2}) + F(X_{m-1}) + F(X_m)$$

$$= F(X_1) + \cdots + F(X_m)$$

所以有 $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}\right)$

$$= F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \cdots + F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

"$\Leftarrow$" 仅当 F 是线性函数

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

代入验证 ①, ②.

性质: F 是线性函数, 则 $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$,

证明: 代入 $\Sigma a_i x_i = 0$.

或者:

$$F\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = F\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$F_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2 + 4$ 不是线性函数

$F_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 0$

$$F_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_1^2+x_2^2$$

$$F_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=1.$$

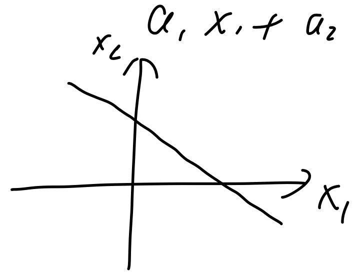
$$F_2\left(2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=4 \neq 2\, F_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

(线性方程组) $\mathbb{R}^n$ 上的 m 个线性函数 $F_1 \cdots F_m$
和 m 个实数 $b_1, b_2 \cdots b_m$

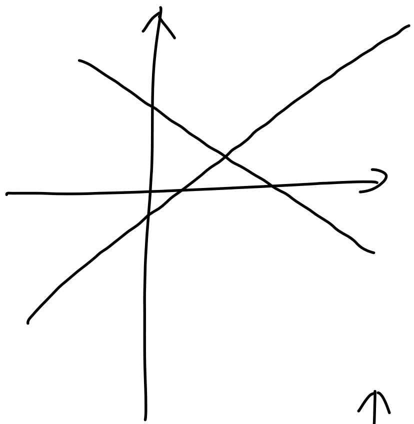
方程组
$$\begin{cases} F_1(x)=b_1 \\ F_2(x)=b_2 \\ \vdots \\ F_m(x)=b_m. \end{cases}$$

称作 n 个变元的线性方程组.

几何解释: $\mathbb{R}^2$. $a_1x_1+a_2x_2=b_1$



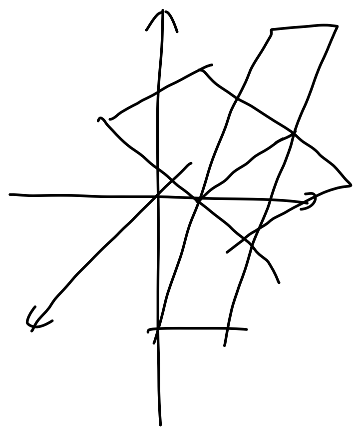
若 $a_1\neq 0$ 或 $a_2\neq 0$



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

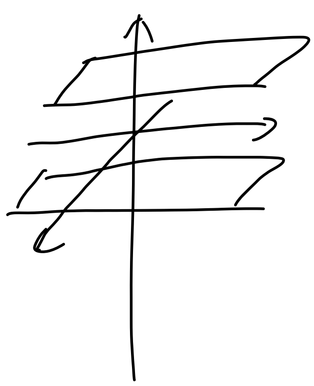
若 $\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}}$，$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$

$\mathbb{R}^3$ 中



2个方程 三个未知数

无穷组解，形成一条"直线"。



无解.

三. 高斯消元法.

解集保持不变.

$$\begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \begin{cases} 4x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{交换 } r_1, r_2} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{array}$$

解集保持不变, 因为可以由 R_1, R_2, R_3 恢复出 r_1, r_2, r_3

$$\xrightarrow[\substack{r_2 \to R_2 \\ r_1 \to R_3}]{r_3 - 2r_1 \to R_1} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 7 \\ -4x_2 + x_3 = -7 \end{array}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2 \to R_3} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5. \\ 4x_2 - x_3 = 7 \\ 0 = 0. \end{array}$$

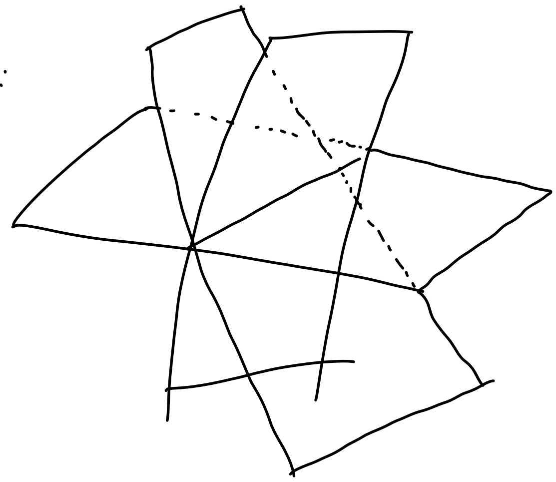
$$x_2 = \frac{1}{4}(x_3 + 7) = \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}$$

$$x_1 = 5 - 2x_2 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}$$

x_3 可取任一实数.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4} \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

几何图形:



基础行变换:　n个变元的线性方程组仍变为线性方程组.

三种: (E1) 交换行

$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_m \end{matrix} \quad \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{matrix}$$

(E2) 某一行乘以非零常数 c　　$c_i \neq 0$

$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ c\,r_i \\ \vdots \\ r_m \end{matrix}$$

(E3) 将 i 行的 c 倍加到另一行上.

$$\begin{array}{ccc} r_1 & \longrightarrow & r_1 \\ r_2 & & r_2 \\ \vdots & & \\ r_i & \longrightarrow & r_i \\ \vdots & & \vdots \\ r_j & \longrightarrow & r_j + c r_i \\ \vdots & & \vdots \\ r_m & \longrightarrow & r_m \end{array}$$

性质：基础行变换均可逆，且逆为基础行变换.

定义（行变换）有限个基础行变换的复合.

例子：

$$\begin{array}{ccc} r_1 & \longrightarrow & r_2 \\ r_2 & \longrightarrow & r_3 \\ r_3 & \longrightarrow & r_1 \end{array}$$

分解为

$$\begin{array}{ccccc} r_1 & \longrightarrow & r_2 & \longrightarrow & r_2 \\ r_2 & \longrightarrow & r_1 & \longrightarrow & r_3 \\ r_3 & \longrightarrow & r_3 & \longrightarrow & r_1 \end{array}$$

任意排列 m 行是行变换.（且均为 E1 的复合）

性质：行变换均可逆，且逆为行变换.

证明：操作 $O1$ 和 $O2$. $(O1 \cdot O2)^{-1} = (O2)^{-1}(O1)^{-1}$

推论：行变换不改变线性方程组的解集

问题：行变换到什么形式可以写下解集的某种表达.

（是否可以找到某种标准表达，方便比较解集）